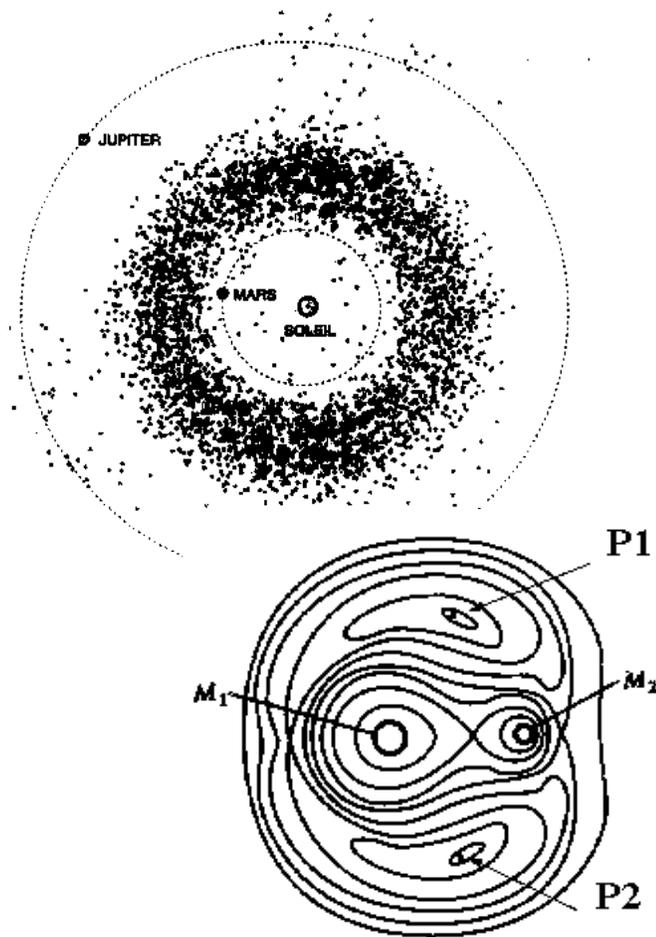


Le chaos dans le Système Solaire

(Nouvelle édition)

par
Benjamin MAUCLAIRE



*Je souhaite remercier Isabelle HOLLARD,
Djamel BOVALI, Marc RIEUGNIÉ et Alain ALBOUY
pour leurs précieux conseils et la persévérance dans leur aide
qui ont permis à cette conférence d'être.*

Table des matières

1	Introduction :	2
2	Eléments de mécanique céleste :	2
2.1	Les lois de Kepler :	2
2.2	La gravitation de Sir Isaac Newton :	3
2.3	L'espace des phases - Section de Poincaré :	4
3	Exemples pratiques de chaos :	6
3.1	Deux histoires de pendule :	6
3.2	Ecoulement d'un fluide autour d'un obstacle :	7
3.3	Le pendule double :	7
3.4	Définition caractérisant le chaos :	9
3.5	Le problème des 3 corps :	9
4	Le Système Solaire rempli de chaos? :	10
4.1	La Lune et les déboires de Newton :	10
4.2	Poincaré à la recherche de la stabilité du Système Solaire :	12
4.3	Mais d'où viennent les astéroïdes? :	14
4.4	Les tours de passe-passe d'Hypériorion :	20
4.5	L'usage intensif de la simulation numérique :	23
5	Conclusion :	28
6	Annexe - Principes de mécanique :	29
6.1	Définition des orbites :	29
6.2	Le calcul différentiel :	30
6.3	Les lois de Newton :	31
6.4	La mécanique lagrangienne :	32
6.5	Les équations Système Solaire :	33
6.5.1	La modélisation du problème à n corps :	33
6.5.2	Forme harmonique du potentiel des perturbations :	34
7	Bibliographie :	38

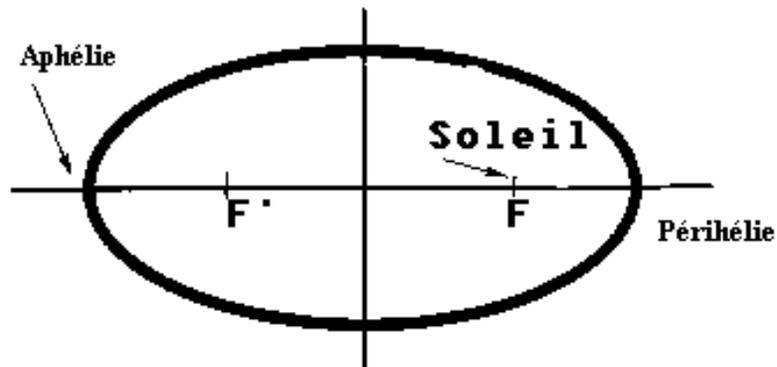


FIG. 1 – *Orbite planétaire dans laquelle le Soleil occupe un foyer.*

1 Introduction :

Depuis la nuit des temps, l'homme a toujours rêvé de perfection dans sa représentation de la nature. Grâce aux avancées des mathématiques, il mit en jeu tous les moyens qu'il avait.

Mais certains problèmes restaient coriaces car la théorie ne s'accordait pas avec les mesures. Ils étaient alors considérés comme des échecs de la toute puissante science.

C'était sans compter sur la présence du chaos ...

2 Eléments de mécanique céleste :

2.1 Les lois de Kepler :

Grâce aux mesures de Tycho Brahé, Johannes Kepler (1571-1630) a établi **3 lois fondamentales** qui décrivent le mouvement des planètes du Système Solaire. Sans pour autant donner l'explication physique de la cause de ces mouvements, elles jettent les bases de la mécanique céleste.

- Première loi : *Les orbites des planètes sont des ellipses dont le Soleil est l'un des foyers.* Depuis Kepler, il est considéré que toutes les planètes suivent ce type de mouvement. L'orbite elliptique explique le mouvement apparent que les planètes décrivent dans le ciel.

- Seconde loi : *Pour chaque planète le rayon vecteur balaye des surfaces égales en des temps égaux (loi des aires).*

Comme le montre la figure 3, pour que cette loi soit respectée, la planète doit se déplacer très vite lorsqu'elle est proche du Soleil (périhélie) et plus lentement lorsqu'elle en est loin (aphélie). C'est bien ce qui est constaté.

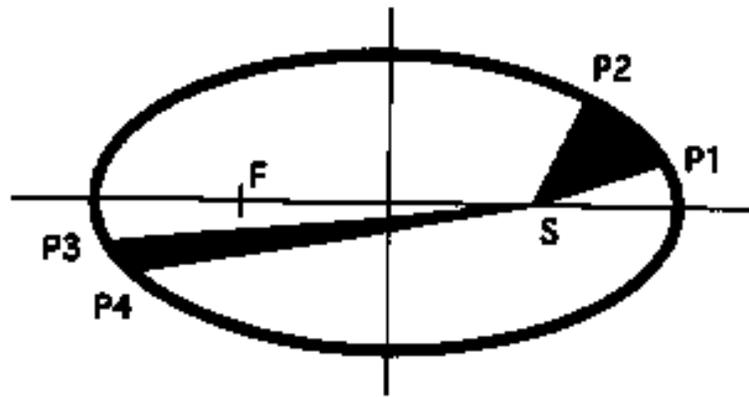


FIG. 2 – Représentation de la loi des aires.

Ceci est aisément observable : en mesurant la vitesse de déplacement d'une planète par rapport au fond du ciel, nous constatons qu'elle n'est pas constante. De plus, la vitesse de la planète est plus importante lorsque celle-ci se trouve (les calculs donnent une correspondance entre la position de l'astre sur son orbite et une date) proche de son périhélie. Il y a donc cohérence entre les calculs et les mesures.

- Troisième loi : *Le cube de la distance moyenne d'une planète au Soleil est proportionnel au carré de la période de révolution sidérale.*

Si l'on pose a_1 le demi-grand axe¹ et T_1 la période de révolution sidérale d'une planète 1, on aura :

$$\frac{a_1^3}{T_1^2} = Cste$$

Mais cette constante étant la même pour toutes les planètes ($\frac{4\pi^2}{Gm_T}$ donc indépendante de la planète), il vient :

$$\frac{a_1^3}{T_1^2} = \frac{a_2^3}{T_2^2} = \frac{a_3^3}{T_3^2} = \dots = Cste$$

On peut alors calculer la distance moyenne au Soleil d'une planète seulement en connaissant sa période de révolution.

2.2 La gravitation de Sir Isaac Newton :

Bien entendu, Newton (1642-1727) n'est pas seulement l'homme que l'on imagine, sur la tête duquel est tombée une pomme et à partir de laquelle (tête !) l'idée novatrice d'une force intrinsèque à la matière est née : la force gravitationnelle.

1. Voir à ce sujet l'annexe sur la mécanique au § 6.1.

Voici l'énoncé de **la loi de la gravitation universelle** qui a 310 ans :

Chaque particule de matière de l'univers attire toutes les autres avec une force directement proportionnelle au produit des masses des deux particules mises en jeu et inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sépare.

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

où les grandeurs sont définies par :

- F : la force d'attraction,
- m_1 et m_2 : masses des deux corps,
- G : constante de la gravitation universelle,
- r : distance entre les deux corps.

2.3 L'espace des phases - Section de Poincaré :

Henri Poincaré, mathématicien français de génie (1854-1912), était plutôt quelqu'un qui travaillait en laissant jouer son intuition, élaborant souvent une représentation mentale des problèmes tout en arpentant son bureau.

Il fut à l'origine d'une nouvelle mathématique pour la résolution des équations différentielles. Sa méthode consistait à appréhender le problème non pas de façon pragmatique en cherchant à déterminer la position du système étudié, mais à l'aide d'un espace abstrait appelé **espace des phases**.

Dans le cas d'un mobile se déplaçant, l'espace des phases à deux dimensions représentera sa vitesse en fonction d'une de ses coordonnées, x par exemple. Ainsi, pour un pendule à tige rigide ce sera sa vitesse de rotation en fonction de l'angle qu'il fait avec la verticale.

On réunit sur un même schéma plusieurs lancers faits avec des angles de départ différents $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots$. Après le lâcher, la vitesse du pendule augmente et l'angle diminue : les courbes sont donc tracées en tournant en sens inverse de celui d'une montre.

Cet espace des phases est visible sur la figure 5. On peut y distinguer deux catégories de courbes : des cercles concentriques (1) et des enveloppes (2) qui englobent le groupe de cercles et qui se prolongent sur les bords de la figure.

• Le premier type (1) correspond aux **mouvements de balancement** du pendule pour différentes amplitudes. Il y a deux situations remarquables où le pendule peut se trouver et qui permettent de tracer ces courbes :

- Lorsque le poids arrive en bas ($\theta = 0$), la vitesse de rotation est maximale,
- Quand le pendule se trouve le plus loin de sa position verticale ($\theta = \theta_{max}$), il s'arrête avant de rebrousser chemin.

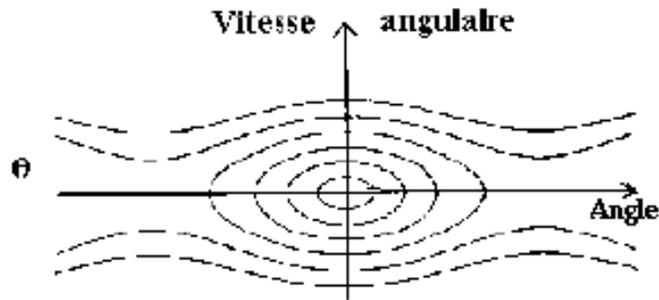


FIG. 3 – Exemple d'espace des phases pour le pendule (non chaotique).

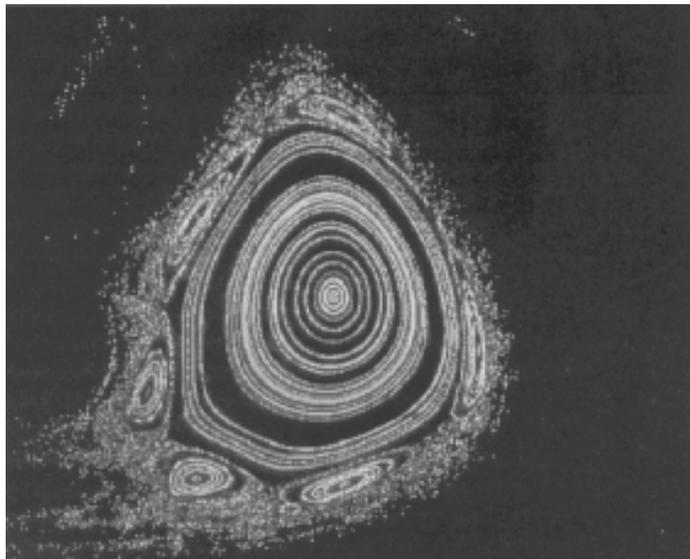


FIG. 4 – Exemple (chaotique) d'une section de Poincaré.

- Le second type (2) ressemble à une suite de vagues. Il représente les cas où le pendule **effectue des tours complets** : sa vitesse est grande (**ce sont les bosses**) lors de ses passages à la verticale (poids en bas) et est minimale (mais non nulle) lorsqu'il se trouve "tête" en haut (**ce sont les creux**).

Aussi, pour mieux comprendre la dynamique du système et y percevoir le chaos, il repéra les intersections de la courbe avec un plan disposé perpendiculairement à la trajectoire qu'elle dessine. Chaque intersection fait apparaître un point sur cette surface. L'ensemble des points ainsi formés produit des formes aussi étranges que simples. C'est **la section de Poincaré**.

Ainsi, sur la figure ci-dessus, on peut voir qu'un mouvement régulier montre un point unique ou une figure fermée (pour des mouvements périodiques) toujours au même endroit sur la section. Tandis qu'un mouvement irrégulier ou chaotique fait apparaître une multitude de petits points tous à des endroits différents.

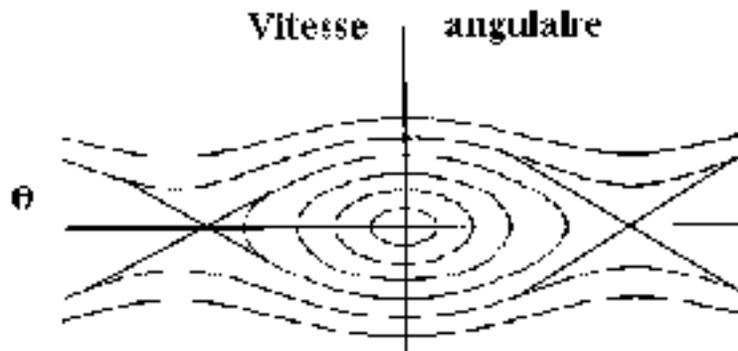


FIG. 5 – Espace des phases d'un pendule rigide.

3 Exemples pratiques de chaos :

Nous allons tenter d'appréhender ce qu'est le chaos à travers quelques expériences simples mettant en œuvre des principes fondamentaux de la mécanique.

3.1 Deux histoires de pendule :

- Pendule à tige rigide motorisé :

Si l'on prend un pendule attaché par une tige rigide (un fil de fer) et entraîné par un petit moteur donnant périodiquement un petit élan au système, on peut alors constater la présence du chaos dans le mouvement.

Chaque fois que le pendule termine sa course lorsqu'il est à la verticale (tête en haut) et s'arrête, plusieurs situations peuvent se produire :

- Il peut reprendre son mouvement de rotation dans le même sens qu'il est arrivé ; soit parce que son inertie l'y entraîne, soit à cause de l'impulsion fournie par le moteur.
- Ou le pendule peut inverser le sens de sa course et repartir du côté d'où il vient.

Donc à chaque fois que le pendule est dans cette position verticale avec $v_{angulaire} = 0$, il a le choix entre deux mouvements possibles : les courbes de l'espace des phases se divisent (la courbe se divise pour former la "vague" et la branche allant croiser l'axe horizontal du repère).

Les zones dénotant du chaos sont celles comprises autour du point de bifurcation : savoir quelle option va prendre le pendule est impossible à prévoir.

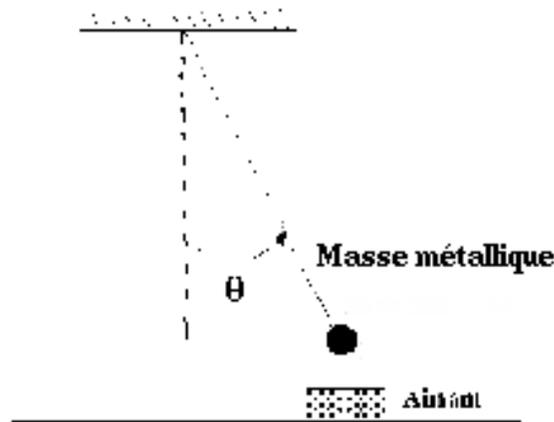


FIG. 6 – Schéma d'un pendule magnétisé.

• Pendule magnétisé :

La manipulation est présentée dans la figure 7bis. L'aimant joue le rôle d'une seconde force créant ainsi un système mécanique à deux degrés de liberté.

Par nature, ces types de systèmes sont chaotiques. Lors des passages du pendule au voisinage de l'aimant, l'action de ce dernier influence plus ou moins le mouvement du pendule qui est alors erratique.

3.2 Ecoulement d'un fluide autour d'un obstacle :

Lorsque l'on fait couler un fluide dans un canal et qu'il y rencontre un obstacle, on peut mettre en évidence avec un colorant des zones de tourbillons situés derrière l'obstacle.

C'est l'expression du chaos car le mouvement d'une brindille sera imprévisible dans ces zones.

Aussi, remarquons-nous qu'en lançant deux brindilles à la suite avec des positions de départ légèrement différentes, elles ne suivent pas la même trajectoire.

3.3 Le pendule double :

Considérons un pendule de deux masses liées entre elles par un fil et l'ensemble attaché à un support (voir figure 9).

Le chaos intrinsèque à ce système est alors simple à mettre en évidence : il suffit de lancer successivement le pendule avec des angles de départ légèrement différents et l'on constate que les mouvements des deux lancers sont différents.

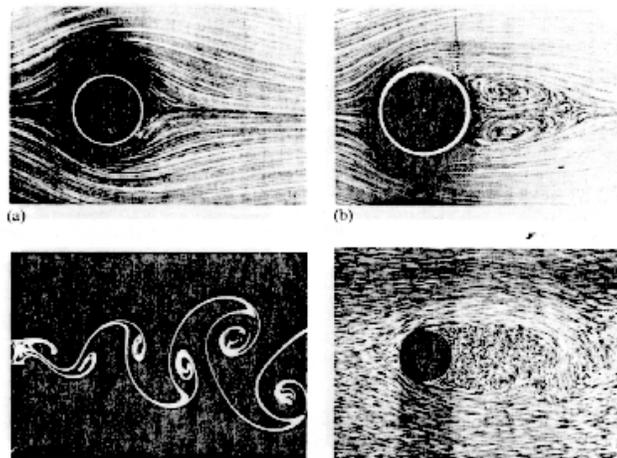


FIG. 7 – *Tourbillons de turbulence dans un fluide.*

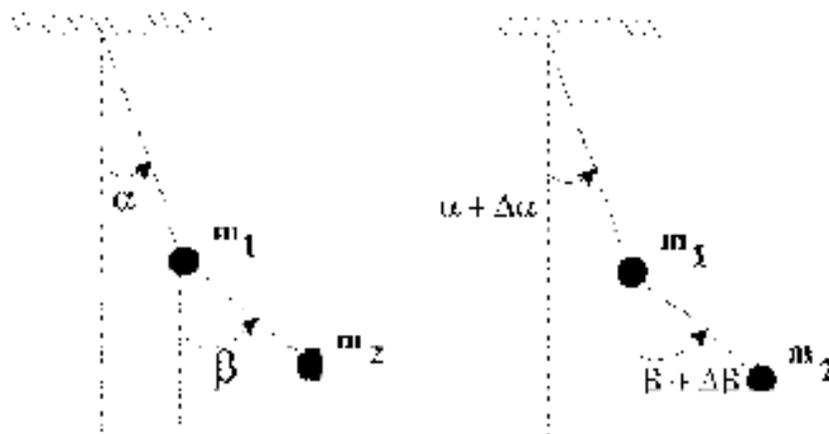


FIG. 8 – *Schéma du pendule double.*

C'est-à-dire qu'après 15 secondes de mouvement lors du premier lancer, on constate qu'au bout de la même durée lors du second lancer, l'angle repéré avec la verticale n'est pas du tout le même qu'au coup précédent.

3.4 Définition caractérisant le chaos :

- Il semble que l'on peut définir le chaos, par les phénomènes pour qui **des conditions de départ peu différentes suivront des mouvements totalement différents** : c'est la sensibilité aux conditions initiales.

- Mais cela ne paraît pas être la seule caractéristique. Aussi a-t-on constaté lors de simulations numériques que la précision limitée des données de départ (position, vitesse, ...) induisait des résultats finaux qui n'étaient pas valides. Ce caractère propre aux systèmes dynamiques s'appelle **l'incertitude aux conditions initiales**.

Ainsi **la conjugaison de ces deux effets a pour conséquence l'imprévisibilité du mouvement du système à long terme.**

3.5 Le problème des 3 corps :

Depuis la naissance de la mécanique de Newton, le problème des trois corps en interaction fait souffrir les mathématiciens. D'Alembert, Laplace, Lagrange et bien d'autres ne purent trouver de solution exacte mais seulement affiner le modèle mathématique existant alors.

Ainsi, lorsqu'il faut considérer le Soleil, ses 9 planètes et les astéroïdes, la complexité du problème rend impossible sa résolution par des méthodes classiques.

De nos jours, les astronomes ont recours à la simulation numérique. Les graphes d'espace des phases (lieu d'étude et d'analyse privilégié des problèmes de dynamique) font alors apparaître toute l'information nécessaire à la détermination de l'état d'un système mécanique à un instant donné. On peut alors savoir si un système est chaotique ou non.

Néanmoins, il est aujourd'hui admis qu'il n'existe pas de solution analytique (une belle solution du genre $x = \dots$) au problème des trois corps.

En effet, les perturbations comme la résonance orbitale entre planètes viennent modifier les trajectoires, ce qui rend imprécis le modèle mathématique utilisé.

Le phénomène de résonance est caractérisée par le rapport T_1/T_2 des périodes de révolutions associées aux deux planètes donnant lieu à cet évènement redondant.

Par exemple, si l'on dit que certains astéroïdes sont en résonance 2/5 avec Jupiter, c'est qu'il faut 2 révolutions à celle-ci et 5 révolutions aux astéroïdes autour du Soleil pour que les astéroïdes se retrouvent de nouveau le plus proche de Jupiter.

Alors Jupiter perturbera de façon répétitive le mouvement des astéroïdes concernés par la résonance.

4 Le Système Solaire rempli de chaos? :

4.1 La Lune et les déboires de Newton :

Cela fait longtemps que l'homme a cherché à prévoir les phases de la Lune autant pour le bon vouloir des rois que pour les nécessités de la religion.

• Les premières mesures :

C'est d'abord Aristote, puis Ptolémée qui postula que la *Lune* était un astre qui tournait autour de la *Terre*.

A partir de ses nombreuses observations il arriva à la constatation suivante : en supposant que l'orbite de la Lune n'est pas circulaire, la position où elle se trouve être la plus proche de la Terre ne reste pas fixe au cours du temps. Ceci s'explique aujourd'hui par le fait que **l'ellipse décrite par la Lune effectue une lente rotation.**

• Les perturbations de la Lune :

La Lune subit donc des accélérations et des décélérations mensuelles. Concrètement les astronomes observaient que :

- la position des premiers et derniers quartiers (quadratures) est en deçà et au delà de celle calculée par les astronomes de l'époque;
- la position de la pleine Lune (PL) et de la nouvelle Lune (NL) est par contre bien prévisible.

Aussi les mesures de la position de la Lune nous donnent-elles les indications suivantes sur ses variations :

Des variations de l'inclinaison de son orbite :

- **Durant 1/3 de sa durée de révolution, la valeur de l'inclinaison est de $4^{\circ}58'30''$.**
- **Les 2/3 du temps restant, elle vaut $5^{\circ}17'30''$.**

Enfin, la Lune voit sa course ralentie en hiver et accélérée en été.

D'autre part, Tycho Brahé a mis en évidence une **influence d'origine solaire** qui fait se déplacer l'orbite de la Lune par rapport au plan moyen de la Terre :

- la ligne des nœuds² tourne en 18.61 ans vers l'ouest,
- la ligne des apsides³ tourne en 8.85 ans vers l'est.

2. *Ligne des nœuds* : axe d'intersection entre l'ellipse formée par l'orbite d'une planète et la surface de référence : elle sont écartées de l'angle d'inclinaison i .

3. *Ligne des apsides* : axe joignant le périhélie et l'aphélie. Voir le chapitre sur la mécanique lagrangienne.

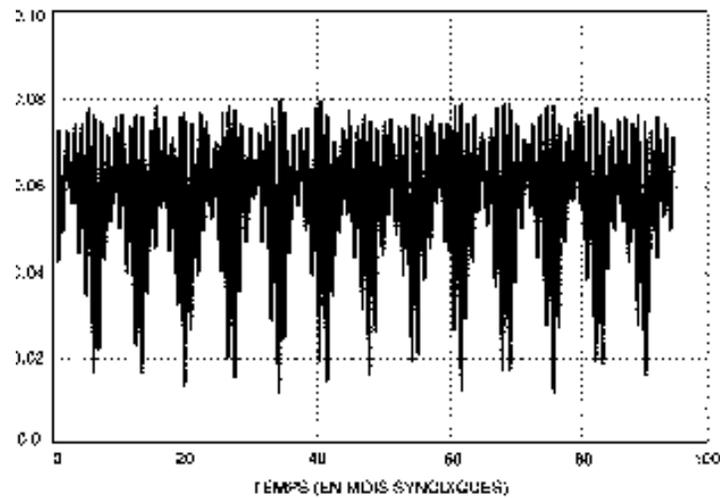


FIG. 9 – Variations de l'excentricité de la Lune.

On se reportera à la figure du paragraphe sur la mécanique lagrangienne qui représente les éléments orbitaux.

• **La puissance des mathématiques :**

Il faut attendre Newton, au début du XVIII^e siècle, pour avoir une description algébrique du mouvement de la Lune. Cette dernière permettait de prédire les positions des “lignes”^{1,2} étudiées par Tycho Brahé.

Ces résultats spectaculaires, entièrement déduits de la théorie, expliquent de manière remarquable l'un des aspects les plus déconcertants du fonctionnement du Système Solaire : **le mouvement de la Lune suit plusieurs cycles bien définis.**

Mais il subsistait toujours une erreur entre les calculs et la position réelle. Autrement dit, la formule de Newton ne correspondrait qu'au premier des termes d'une série. Ainsi, le gouvernement anglais et plusieurs sociétés scientifiques d'Europe promirent de récompenser la démonstration qui éliminerait le fameux écart.

Par la suite de nombreux mathématiciens et astronomes se penchèrent sur le problème de la Lune. Parmi eux, Clairaut, d'Alembert et Euler. Ce dernier finit par obtenir un système de 3 équations différentielles du second ordre. Bien que Clairaut l'aida à corriger certains problèmes, Euler dut lui aussi admettre son échec.

Vinrent ensuite Lagrange et Laplace (1760) qui expliquèrent **l'éloignement lent et progressif de la Lune par rapport à la Terre** à partir du renflement de la surface de la Terre (phénomène de marée) et **les variations oscillantes de l'excentricité** dues à l'influence gravitationnelle des autres planètes.

Plus tard, Hill et Delaunay partant d'une solution simple du problème à trois corps, adoptèrent une méthode de calcul qui considérait la superposition mathématique des ondulations et déplacements de la ligne des apsides et des nœuds. Ce modèle fut amélioré par Brown au XX^e siècle, ce qui permit le succès des missions lunaires Appollo.

Pourtant de nos jours encore et malgré les avancées mathématiques, **toute prédiction à long terme de la position de la Lune reste imprécise**. Le mouvement de notre satellite contient donc une part erratique qui lui confère une trajectoire variant chaotiquement dans une moindre mesure (voir figure 10).

4.2 Poincaré à la recherche de la stabilité du Système Solaire :

• Parti pour un concours de mathématiques :

Au cours du XIX^e siècle, la tradition voulait que les solutions de problèmes mathématiques soient grassement récompensées. C'est alors qu'à l'occasion du soixantième anniversaire d'Oscar II, alors roi de Suède et de Norvège, une série de problèmes fut proposée par des personnalités du monde scientifique.

Carl Weierstrass émit la proposition de résoudre de façon rigoureuse la polémique posée 30 ans auparavant par Dirichlet concernant la *stabilité du Système Solaire*. Cette dernière reposait sur la nature incomplète des solutions trouvées à partir d'équations différentielles.

En 1858, Dirichlet affirma que le Système Solaire était stable et il annonça peu avant sa mort qu'il avait trouvé une solution. Elle était basée sur des séries déduites de la théorie des perturbations et qui étaient convergentes, c'est-à-dire qu'elles finissaient toujours par prendre des valeurs finies.

Henri Poincaré décida de s'atteler à la tâche et ce fut l'occasion pour lui de développer une approche révolutionnaire de la mécanique et de ses mathématiques.

• Les étonnants résultats de Poincaré :

Lorsqu'il présenta ses travaux au jury, cela eut un retentissement hors du commun. Il dit qu' "*au lieu d'embrasser dans son ensemble le déplacement progressif d'un phénomène, on cherche simplement à relier chaque instant à l'instant immédiatement antérieur. On admet que l'état actuel du monde ne dépend que du passé le plus proche, sans être directement influencé pour ainsi dire, après le souvenir d'un passé lointain. Grâce à ce postulat, au lieu d'étudier directement toute la succession de phénomènes, on peut se borner à en décrire l'équation différentielle*".

Aussi ajouta-t-il : "*Ne peut-on pas se demander si l'un des corps restera toujours dans une certaine région du ciel ou bien s'il pourra s'éloigner indéfiniment ; si la distance de deux corps augmentera, ou diminuera à l'infini, ou bien si elle restera comprise entre certaines limites ? Ne peut-on pas se poser mille questions de ce genre, qui seront toutes résolues quand on saura construire qualitativement les trajectoires des trois corps ?*"

À cet endroit, Poincaré sous-entend l'élaboration d'espaces de phase⁴ qui était in-faisable dans les cas compliqués comme celui des trois corps. C'est ainsi que Poincaré

4. Voir paragraphe 2.5

vint à constater que certaines solutions amenaient à des trajectoires compliquées. Car les séries mathématiques constituant les solutions divergeaient (prenaient une valeur infinie).

Si les équations décrivant un système de trois corps en interaction gravitationnelle permettent d'établir une relation bien définie entre le temps et la position des corps, **il n'existe pour autant pas de raccourci de calcul ou de formule magique permettant de prédire les positions à long terme. La conséquence était la divergence des séries déduites de la théorie des perturbations.** Les systèmes Newtoniens laissent alors une grande place à l'imprévisible.

Cependant, le problème des trois corps admet des solutions approximatives aussi précises que l'on veut : le calcul des premiers termes d'une série donne une réponse satisfaisante. Seulement **on ne peut calculer que pas à pas la future position** de l'astre.

• Sensibilité aux conditions initiales et incertitudes :

Par ailleurs, Poincaré découvrit que les trajectoires suivies par deux points très proches au départ pouvaient tout autant rester constamment voisins que se séparer très vite.

Ces deux occurrences se présentent dans la section de Poincaré respectivement par :

- des points remplissant la même zone,
- des points dispersés : la trajectoire erre au hasard sans jamais repasser au même endroit.

Ceci s'appelle **la sensibilité aux conditions initiales**. Il s'avère que la mesure des paramètres initiaux (vitesse et position de départ ...) possède une précision limitée : c'est **l'incertitude sur les conditions initiales**. C'est-à-dire que de petites différences dans les conditions initiales engendrent de très grandes différences dans les états finaux correspondant : **la prédiction devient alors impossible**.

Ainsi, les questions soulevées lors de l'étude de la Lune 150 ans plus tôt sont transportables à la quasi totalité des systèmes chaotiques qu'il s'agisse d'un pendule magnétisé, de l'écoulement d'un fluide ou du Système Solaire en entier.

On constate que **la stabilité du Système Solaire** est intimement liée au **phénomène de résonance** (voir §4.3).

C'est-à-dire que les termes d'interaction subtils et cumulatifs dus à la résonance se renforcent mutuellement et deviennent très influents.

• Le dénouement de la stabilité du Système Solaire :

Par la suite, en 1913, Sundman trouva une solution particulière au problème des trois corps (analogue à celui du Système Solaire) un an après la mort de Poincaré. Bien que ce dernier eût déjà connaissance de cette solution, il la savait sans intérêt car elle s'exprime à l'aide d'une série convergente mais de façon très lente.

En 1954, Kolmogorov provenant d'une longue tradition de mathématiciens-mécaniciens russes avait élaboré une méthode d'étude des espaces de phases complexe. Il fallut at-

tendre 1963 avec Arnold, élève du précédent, et Moser qui trouvèrent quelques solutions stables pour le Système Solaire. Les travaux des 3 hommes aboutirent au *théorème du KAM* (Kolmogorov-Arnold-Moser) datant de 1960.

Ils conclurent que la convergence ou non des séries utilisées pour décrire le mouvement des trois corps dépend des conditions initiales. Tandis que Poincaré avait étudié seulement les conditions menant à la divergence des séries.

En guise de conclusion, nous pouvons connaître comment le chaos cohabite avec des mouvements périodiques dans le Système Solaire.

- **la régularité :**
elle se manifeste par de très lentes et infimes modifications de l'excentricité de l'orbite qui varie sous l'influence des perturbations.
- **le chaos :**
il s'exprime par de brusques variations de l'excentricité (et d'autres paramètres) qui écarte considérablement les planètes de leur trajectoire initiale.

Ainsi, Poincaré révéla la véritable portée des lois newtoniennes. Il mit en évidence toute la complexité qui était enfouie depuis deux siècles dans les équations du Système Solaire.

Le temps était donc venu de rechercher le désordre dans le ciel après que l'on y a si longtemps cherché la régularité.

4.3 Mais d'où viennent les astéroïdes ? :

• Introduction :

Située entre Mars et Jupiter, à la fois influencée par cette dernière et le Soleil, la ceinture d'astéroïdes possède une position bien particulière au sein du Système Solaire.

On ne pouvait trouver meilleur endroit pour rechercher des témoignages du chaos dynamique que Poincaré avait entrevu dans ses équations. On comptait notamment vérifier la règle de Titius⁵.

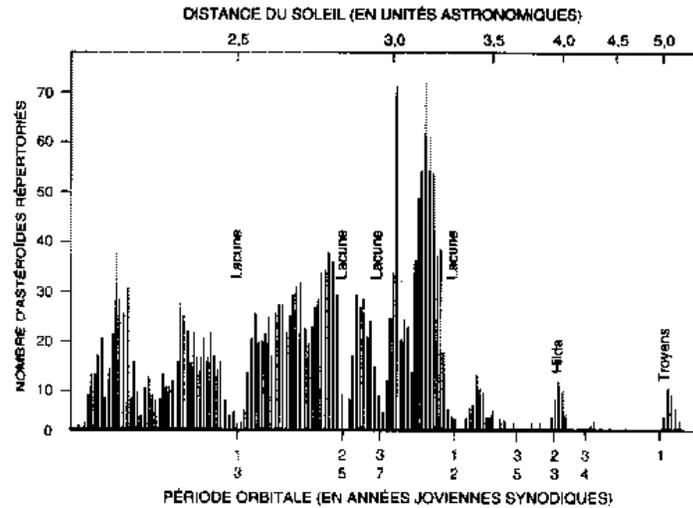
• Orbite de Cérès :

Découvert par un moine sicilien Giuseppe Piazzi en 1800, Cérès a été un des premiers astéroïdes à attirer l'attention des scientifiques.

Piazzi l'observa pendant un mois, puis tomba malade et ne pu faire qu'une seule observation avant que l'objet ne s'approche du Soleil. Il fallait donc retrouver l'astéroïde après sa sortie du halo solaire, c'est-à-dire reconstituer son orbite.

Carl Friedrich Gauss entreprit à l'âge de 23 ans de relever ce défi attrayant. Il mit en œuvre ses dons exceptionnels au service de la mécanique céleste : prévoir une orbite de façon satisfaisante à partir d'un petit nombre de données.

5. Loi donnant la présence ou non d'une planète selon la distance au Soleil.



Le graphe du nombre d'astéroïdes en fonction de la distance du Soleil présente des lacunes : peu d'astéroïdes ont des orbites dont les périodes correspondent à des fractions simples de la période orbitale de Jupiter, telles que $1/3$, $2/5$, $3/7$ et $1/2$.

FIG. 10 – Lacunes en astéroïdes mises en évidence par calcul.

L'objet fut retrouvé à moins d'un degré de sa position prévue et Piazzi le nomma Cérés du nom de la déesse protectrice de la Sicile.

D'autres astéroïdes comme Pallas ou Vesta furent ensuite découverts. En 1890, on en dénombrait déjà 300.

• La ceinture d'astéroïdes et ses bizarreries dynamiques :

De nos jours, on compte plus de 5000 astéroïdes et l'on pense que la ceinture doit en contenir un million mesurant plus de 1 km de diamètre.

Tous ces corps subissent à la fois l'attraction des planètes importantes (surtout Jupiter) et du Soleil et sont donc constamment tirés dans un sens puis dans l'autre : les orbites décrites sont alors passablement agitées.

Ainsi, rien n'interdit que le cumul de ces perturbations mineures puissent provoquer de radicales modifications de leur mouvement. L'étude par Kirkwood en 1857 montre que le nombre d'astéroïdes varie étrangement en fonction de leur distance au Soleil. En étudiant le demi grand-axe a des orbites, il constata que pour certaines valeurs de a , il n'y avait que très peu d'astéroïdes, tandis qu'à d'autres correspondait une grande population de ces cailloux.

Il put ainsi conclure que très peu d'astéroïdes possédaient une période proche de $1/3$, $2/5$ et $1/2$ de celle de Jupiter.

Ces vides sont observés aux distances du Soleil pour lesquelles **le rapport entre la période de l'astéroïde et celle de Jupiter est une fraction simple**. Par exemple, un objet d'orbite de rayon 2,5 fois la distance Terre-Soleil accomplirait, selon les calculs, 3 révolutions pendant que Jupiter n'en ferait qu'une seule. On dit alors que cet astre serait dans une **résonance 3/1**.

Dans ces conditions, l'astéroïde et la planète se retrouvent périodi-quement proches l'un de l'autre. Ces coïncidences répétées produisent des effets gravita-

tionnels qui se renforcent au cours du temps : ils déplaceraient suffisamment l'astéroïde pour modifier l'excentricité de son orbite et décaler sa position observée. **Ainsi se seraient constituées les lacunes.**

Mais il y a des situations où le phénomène observé est différent :

- Dans le cas de la résonance 1/1 et 3/2 qui correspond respectivement aux astéroïdes *Troyens* et *Hilda* : dans ces deux résonances il y a un excès d'astéroïdes .
- Les résonances de Kirkwood n'expliquaient pas comment les orbites étaient modifiées aussi spectaculairement.

C'est pourquoi, il entreprit plutôt une observation de l'évolution sur de longues périodes.

• **Etude à long terme de la ceinture d'astéroïdes :**

Ainsi, l'une des possibilités pour étudier la stabilité de l'orbite des astéroïdes est d'examiner leur évolution sur de longues périodes. Les premières tentatives reposaient sur un passage à la moyenne des expressions mathématiques déduites de la théorie des perturbations.

C'est comme lorsqu'on prend une photo longue pose de la surface de la mer qui avec le mouvement permanent des vagues crée une surface lisse et épaisse. Par conséquent, l'absence de sauts dans la moyenne serait signe de stabilité.

Or Poincaré avait démontré les insuffisances de la théorie des perturbations. Alors les astronomes cherchèrent la source de ces lacunes dans l'origine de la formation du Système Solaire .

Pour cela, ils utilisèrent des ordinateurs avec des méthodes mathématiques donnant un nouveau type d'approche de la dynamique qui incluait le chaos.

Il ressortit des études numériques faites dans l'espace des phases, que ce dernier se divisait en régions de comportements réguliers et d'autres liées aux comportements imprévisibles.

Mais les calculs nécessitaient une telle puissance que les prévisions ont été faites sur une période de 10000 ans. De plus rien ne garantissait que cette durée était suffisante pour mettre en évidence les modifications spectaculaires risquant d'affecter les orbites.

Par conséquent, **on ne pouvait pas définitivement dire si les lacunes de la ceinture étaient dues à des astéroïdes qui auraient été chassés.** Il fallait donc **retenir dans les calculs seulement les contributions aux tendances à long terme et les effets de résonance.**

• **Jack Wisdom et le raccourci vers le chaos :**

A la fin des années soixantedix, J. Wisdom fit une thèse sur l'application de la dynamique chaotique à la mécanique céleste. Il élaborait une technique qui permettait de faire calculer plus rapidement les ordinateurs grâce à un substitut mathématique qui remplaçait les équations différentielles classiques.

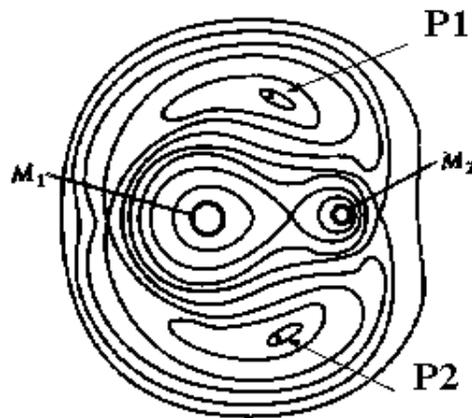


FIG. 11 – Puits de potentiels d'un système à trois corps. Aux points P_1 et P_2 , le troisième astre se trouve en équilibre instable.

D'autre part, il observa les figures dessinées sur la section de Poincaré et non pas la trajectoire dans l'espace des phases. Wisdom fit l'étude des astéroïdes situés proches de la résonance 3/1, là où le déficit est le plus important. Il la peupla de 300 astres fictifs, puis observa leur devenir.

Il put ainsi découvrir que certaines positions et vitesses initiales donnaient lieu à des trajectoires dont l'excentricité variait peu et régulièrement et que pour d'autres conditions de départ, les orbites voyaient leur excentricité subir de brusques variations.

Il décida alors **d'évaluer la probabilité pour qu'un astéroïde soit expulsé de son orbite initiale**. Il dressa une carte détaillée de l'espace des phases correspondant aux régions chaotiques des orbites situées proches de la résonance 3/1.

Wisdom conclut que Jupiter induisait une zone chaotique définie par une certaine gamme de positions et de vitesses initiales ; ainsi deux particules possédant des paramètres initiaux presque identiques, finissent par décrire des orbites très différentes.

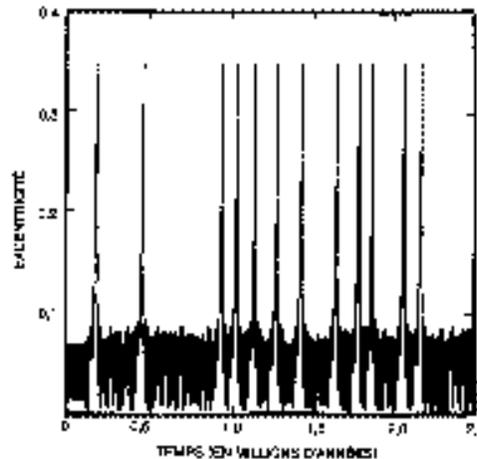
Il calcula que 1/5-ième des astéroïdes situés sur la résonance 3/1 peuvent voir leur orbite changer d'ici un demi-million d'années, puis finir par s'écraser sur la Terre. Ceci expliquerait l'origine des météorites qui proviendraient de la ceinture.

Donc, ce seraient des aspirations gravitationnelles faisant suite à une situation de résonance qui auraient créé les lacunes, Jupiter n'étant à l'origine de la résonance qui provoque de tels croisements.

- **Les prévisions gagnent de la précision :**

Une des conséquences de la présence du chaos dans la mécanique céleste est que la précision des calculs se devait d'être plus importante. En effet :

Des boules de billard lancées à partir de positions presque identiques, finissent par avoir une trajectoire très différente après quelques rebonds. C'est la même chose lors des itérations d'un programme informatique où la précision des décimales pos-



Les pics d'excentricité de l'orbite exceptionnellement chaotique d'un astéroïde hypothétique proche du résonance 2/1 avec Jupiter correspondent à de brusques transformations de la forme de son orbite elliptique.

FIG. 12 – Étude de l'excentricité d'astéroïdes hypothétiques.

sède une limite.

Il y a alors accumulation des erreurs. Ceci est conforté par ce qui avait été constaté par Poincaré.

A cause du chaos, il faut donc compter avec les effets cumulés de l'amplification des erreurs d'arrondi et de la rapide divergence des trajectoires, qui au départ sont voisines.

• J122 et le chaos stable :

Il existe plus d'un astéroïde qui possède un comportement intrigant. En 1992, deux astronomes, Andrea MILANI et Anna Nobili, de l'Observatoire de Pise ont fait l'analyse numérique de l'astéroïde Helga (J122). Ils ont constaté que son orbite ne pouvait être déterminée à plus de 10 000 ans à l'avance.

Pourtant, **l'astre semble rester confiné dans une trajectoire voisine de celle de Jupiter. Il en ressort un concept apparemment paradoxal : le chaos stable.** Ce type de comportement est analogue à celui d'une bille dans le plateau d'une roulette de casino. Elle vit un mouvement essentiellement chaotique mais demeure à l'intérieur de la roue.

Ces deux astronomes amenèrent alors l'idée que le chaos stable serait une caractéristique relativement commune dans le Système Solaire.

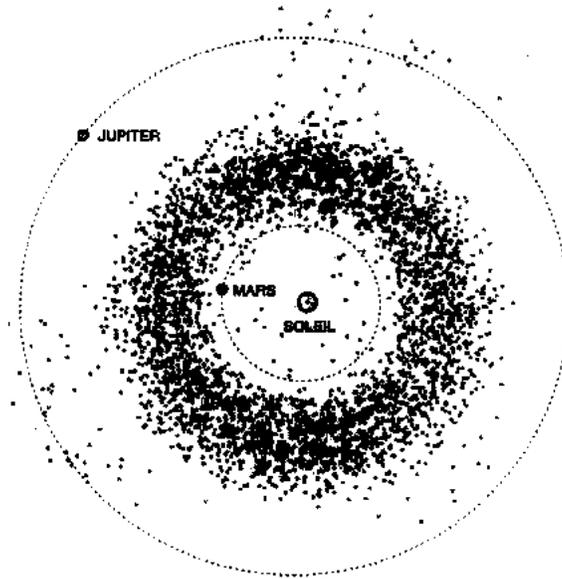


FIG. 13 – *Distribution des astéroïdes dans le Système Solaire interne.*

• Les astéroïdes voisins de la Terre :

Pourquoi le Système Solaire prise-t-il l'arrangement qui est le sien ?

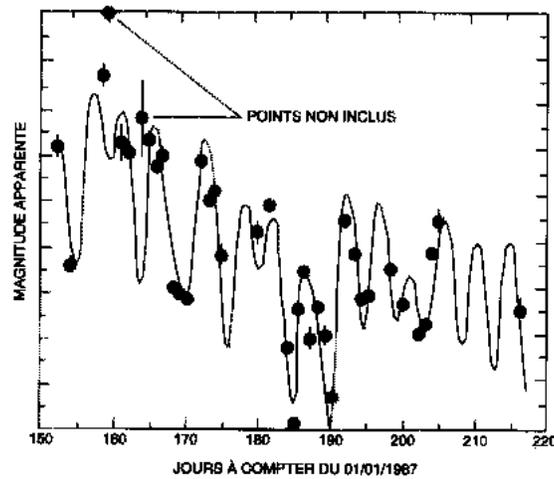
L'existence d'astéroïdes dans le voisinage immédiat de la Terre reste une énigme. Il est estimé qu'au moins un astéroïde de diamètre supérieur à 1km entre en collision avec la Terre tous les millions d'années. La durée de vie d'un astéroïde dans la zone du système solaire interne est inférieure à 100 millions d'années.

Or depuis 4,5 milliards d'années, ces blocs rocheux auraient dû déjà tous s'écraser. Cependant il y en a toujours ! On imagine donc qu'un réapprovisionnement se ferait à partir de la ceinture d'astéroïdes grâce à l'influence gravitationnelle de Jupiter qui jouerait alors un rôle de catapulte.

Les zones chaotiques découvertes par les chercheurs correspondent à la position des lacunes. Pourtant une étude quantitative montre que cet accord n'est pas parfait. Il n'est pas impossible que la structure et les caractéristiques particulières de la ceinture d'astéroïdes aient été en partie déterminées par les processus responsables de la création du Système Solaire .

En conclusion, sans une dynamique incluant le mouvement chaotique, il est impossible d'expliquer comment la gravitation débauche certains corps dans la ceinture d'astéroïdes pour les projeter vers les planètes intérieures.

Mais le chaos n'est que l'un des nombreux comportements que provoque la gravitation.



L'évolution de la luminosité d'Hypérion sur une période de 60 jours a un caractère erratique dont aucune courbe périodique simple ne peut rendre compte.

FIG. 14 – Mesures de la luminosité d'Hypérion.

4.4 Les tours de passe-passe d'Hypérion :

• Les observations d'Hypérion :

1987, Observatoire de *Cerro Tololo*. Klavetter est là pour suivre Hypérion, un satellite de Saturne qui possède un mouvement étrange. Hypérion a été identifié pour la première fois en 1848. Ensuite observé par *Voyager II* en 1981, il a été décrit comme un satellite à la forme peu commune de cacahuète de dimensions égales à $380 \times 290 \times 230$ km.

Ces observations étaient menées dans le but de vérifier l'affirmation faite 3 ans auparavant par Jack Wisdom, S.T. Aton Peal et François Mignard qui stipulèrent, d'après leurs calculs, qu'Hypérion effectuait des pirouettes sur lui-même plutôt que de tourner comme une toupie autour de Saturne, tel que le font les autres satellites.

Ainsi, pour obtenir une preuve du témoignage incontestable du mouvement chaotique de ce satellite, les observations consistaient à déceler les variations aléatoires de sa luminosité. La quantité de lumière réfléchiée par l'astre dépend de son orientation sachant qu'une grande surface tournée vers le Soleil réfléchit davantage de lumière qu'une petite.

D'autre part, ce qu'il y avait d'insolite était que sa période de rotation sur lui-même (13 jours) était différente de celle de sa révolution (21 jours) autour de Saturne, a contrario de la Lune où les deux périodes sont identiques.

Pour cette dernière, cela s'explique par les forces de marées créées par l'interaction gravitationnelle. Cependant une part de l'énergie mise en jeu dans le déplacement des matériaux solides ou liquides qui forment le renflement terrestre (écorce et marées) est inévitablement perdue.

Cela entraîne que le renflement est déphasé (en suivant la Lune) et que par suite

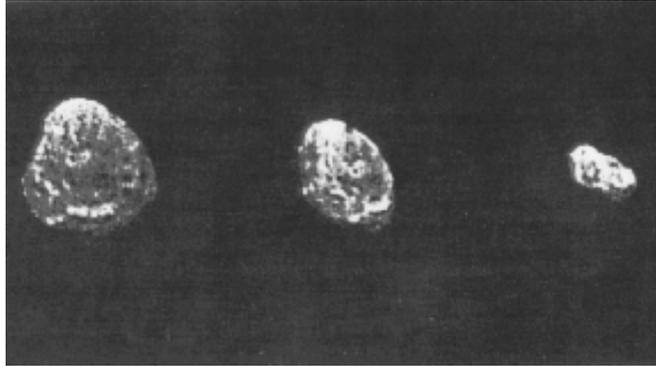


FIG. 15 – Des prises de vues d’*Hypérion* faites par *Voyager II*.

le satellite freine la rotation de la planète. Ce phénomène étant réciproque, le satellite finit par tourner sur lui-même à la même vitesse qu’il tourne autour de la planète. Il restait donc à expliquer la configuration propre à *Hypérion*.

• **Les raisons d’une instabilité chronique :**

A l’opposé de la Lune, *Hypérion* ne s’est pas stabilisé et ne présente pas éternellement la même face à Saturne. C’est comme une bouteille partiellement remplie qui ne peut pas très bien tourner sur elle-même si on la lance comme une toupie : le déplacement du liquide à l’intérieur vient interférer avec le mouvement de rotation.

Les trois chercheurs suggérèrent alors deux facteurs qui empêchent *Hypérion* de s’installer dans cet état synchrone :

- Sa forme étonnamment allongée,
- L’influence de *Titan*, satellite géant juste voisin.

Il s’avère clair que l’influence gravitationnelle de *Titan* a tellement étiré l’orbite d’*Hypérion* que celle-ci n’est plus du tout circulaire. Du fait que sa vitesse varie énormément selon qu’il soit proche ou non de Saturne.

D’autre part, lorsque *Hypérion* effectue 3 révolutions autour de sa planète hôte, *Titan* en fait 4 (résonance 4/3). Par conséquent, les attractions gravitationnelles répétées contribuent à maintenir *Hypérion* sur ce type d’orbite.

Ainsi, la conjugaison de tous ces effets font qu’*Hypérion* se trouve dans un état d’équilibre précaire.

• **Les secrets livrés par l’espace des phases :**

Pour mieux comprendre le mouvement étonnant d’*Hypérion*, Jack Wisdom et son équipe calculèrent sur ordinateur les équations caractérisant ce satellite. A partir de la trajectoire dans l’espace des phases, ils firent dessiner la section de Poincaré (voir §4.1).

Ces diagrammes représentent pour diverses conditions initiales, l’orientation du satellite en fonction de sa vitesse de rotation lors de chaque révolution effectué.

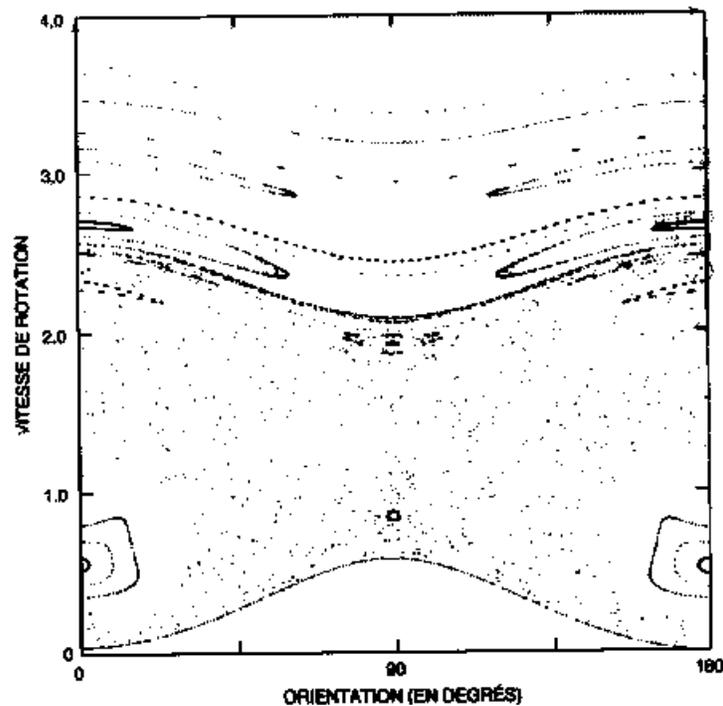


FIG. 16 – Espace des phases du satellite Hypériorion .

Au lieu de changements aléatoires dans la forme ou dans l'orientation de son orbite, les calculs montraient que le chaos se manifestait par **de brusques variations dans l'orientation de l'axe de rotation d'Hypériorion sur lui même.**

De plus, les zones chaotiques d'une orbite de forme irrégulière et allongée correspondent à un large éventail d'orbites possibles. Ce qui est curieux, c'est que l'axe de rotation d'*Hypériorion* ne se trouve pas orienté dans le plan de son orbite comme il devrait l'être au bout de quelques révolutions. Ceci s'explique par **la situation d'Hypériorion qui prisonnier de la résonance qu'il a avec Titan.**

D'après les trois chercheurs, *Hypériorion* présente un curieux amalgame de comportements, ordonnés et chaotiques :

- **Il parcourt une orbite régulière et prévisible : les astronomes peuvent calculer sa position des années à l'avance.**
- **A contrario, son orientation est beaucoup moins prévisible.**

Par conséquent, si les mesures de la luminosité sont irrégulières, alors le mouvement d'*Hypériorion* serait bien de nature erratique.

Si l'on observe effectivement une variation irrégulière de luminosité, les résultats restèrent ambigus car la fréquence des mesures faites par Klavetter avait été discontinues : il ne put effectuer des observations régulières compte tenu de mauvaises conditions météorologiques à *Cero Tololo*.

• **Les conclusions étonnantes de Klavetter :**

Finally, Jack Klavetter parvint à tracer un ensemble de points représentant chacun la luminosité intrinsèque du satellite à chaque révolution autour de Saturne. La succession était si irrégulière **qu'il était impossible de tracer une courbe lisse et de nature périodique (preuve de non chaos) passant par tous les points.**

Il ne put expliquer ces variations qu'en supposant qu'Hypérion pirouettait de manière chaotique. C'était la seule hypothèse compatible avec les mesures.

Cependant, ce n'était pas suffisant pour constituer une preuve du comportement erratique d'Hypérion. Alors, Klavetter chercha à explorer, à l'aide d'ordinateurs, différentes régions de l'espace des phases en testant les conditions initiales particulières.

Ces dernières étaient introduites dans son modèle théorique et conduisaient à des changements d'orientation chaotiques de l'axe de rotation d'Hypérion.

Il put ainsi démontrer que les points constituant sa courbe de lumière correspondaient effectivement à une trajectoire unique et chaotique dans l'espace des phases.

Ironiquement, le fait de connaître les équations du mouvement et leurs solutions n'apporte pas grand chose, car *ces solutions sont tellement sensibles aux conditions initiales* qu'elles interdisent toute prévision.

4.5 L'usage intensif de la simulation numérique :

• Historique de la problématique :

Le problème de l'avenir à long terme du Système Solaire est assez ancien. La première tentative sérieuse pour le résoudre a eu lieu il y a 200 ans. Ce fut Pierre Simon marquis de Laplace (1749-1827) qui, en tant que cofondateur du *Bureau des Longitudes*, se pencha sur l'épineuse question : **quelle est l'évolution du Système Solaire sur de longues périodes ?**

Aux XVII^e et XVIII^e siècles, les mouvements déconcertants de Jupiter et Saturne, constituaient le meilleur exemple de telles tendances au déséquilibre. Newton en était arrivé à déduire qu'une intervention divine était périodiquement nécessaire pour maintenir la cohésion du système et éviter qu'il se disloque.

Laplace définissait le déterminisme ainsi : *“Une intelligence qui pour un instant donné connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ses données à l'analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'Univers et ceux des plus légers atomes : rien ne serait incertain, et l'avenir comme le passé, serait présent à ses yeux.”*

Pourtant, comme l'avait vu Poincaré, le déterminisme n'est pas roi au sein du Système Solaire. Il y a durant une période où l'on a cru qu'il serait possible de calculer le mouvement des planètes avec toute la précision souhaitée. Aujourd'hui, grâce aux ordinateurs, les astronomes ont la possibilité de visionner l'avenir et le passé du Système Solaire .

• Nouvelles machines, nouvelles méthodes :

Plus tard, en 1963, Vladimir Arnold démontra que si les masses, les inclinaisons et les excentricités des planètes sont suffisamment faibles, tout système planétaire en dépit de sa tendance au chaos restera quasi-périodique et donc stable.

La mise en œuvre de l'intégration (leur résolution) des équations différentielles à l'aide d'un ordinateur restait néanmoins très lente.

En effet, l'incrément (temps espaçant chaque calcul) doit être suffisamment petit pour rendre compte autant du mouvement de Mercure (période de 88 jours) que de celui de Pluton (248 ans).

Aucun modèle numérique n'était alors capable de travailler sur des échelles de temps aussi diverses sans gaspiller un temps énorme pour le calcul des petites variations.

D'autant plus qu'à l'époque les machines de calcul étaient généralistes et ne pouvaient être pleinement efficaces pour de tels calculs.

• G. Sussman et Digital Orrery :

Il fallut attendre 1973 avec la thèse de George Sussman au Massachusetts Institut of Technology pour voir des progrès apparaître. Il suggérait de faire collaborer astronomes et ingénieurs informaticiens pour construire des machines spécialisées qui exploiteraient avantageusement les particularités du problème qui leur serait soumis.

Ayant pris connaissance des découvertes fascinantes de Jack Wisdom sur les orbites des astéroïdes, il lui proposa de construire un ordinateur pour obtenir une solution plus définitive.

En 1983, Digital Orrery vit le jour et réunissait dix ordinateurs indépendants dans une grosse boîte à chaussures, où chacun prenait en charge les calculs liés à chaque planète.

Toutes les particularités et affinements firent de cette machine miracle un bolide capable de calculer les mouvements du Système Solaire 3 fois plus vite qu'un *Cray I* et 6 fois plus vite qu'un *VAX 11/780*, qui étaient les ordinateurs les plus puissants à l'époque.

Les premiers résultats ne tardèrent pas et une des premières grandes excursions de Digital Orrery lui fit couvrir environ 100 millions d'années vers le futur et autant dans le passé.

Cette simulation fit entrevoir pour la première fois l'avenir à long terme du système extérieur (voir la figure n° 18).

• De nouvelles voies pour Digital Orrery - Pluton :

Le mouvement de Pluton était déjà connu pour être particulièrement complexe. D'autre part, Digital Orrery avait mis en évidence plusieurs nouvelles caractéristiques du mouvement de Pluton.

Cette planète présente un nombre étonnamment grand d'écarts importants qui se répètent sur des millions d'années, phénomènes qu'aucune théorie perturbative ni d'intégration numérique n'avait jusqu'ici révélé.

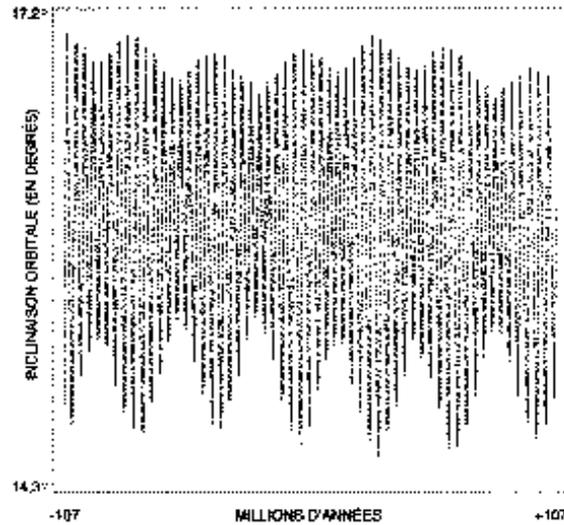


FIG. 17 – Variations de l'inclinaison de Pluton.

Les deux chercheurs décidèrent de regarder ce qui se passait lorsque l'on faisait partir Pluton de deux positions initiales légèrement différentes. Les trajectoires qui s'en suivirent sur 854 millions d'années divergeaient : elles finissaient par suivre un chemin différent.

Les accumulations d'arrondis ont été en partie éliminées par une bonne adaptation du pas d'incrément. Un autre problème apparaissait lorsque l'on faisait répéter à rebours le calcul de l'évolution du système ne permettait pas de revenir au point de départ !

Lors de ces allers-retours dans le temps, les planètes ne reprenaient pas exactement leur position initiale. C'était une marque du chaos.

Par contre, sur les graphes, l'évolution des paramètres orbitaux des planètes présentaient de petites variations et les orbites restaient régulières. Pluton possédait un mouvement complexe mais n'avait aucun signe d'agitation erratique.

Ainsi, les mouvements des planètes côtoyaient à la fois le chaos et la régularité.

• La continuité de Digital Orrery :

Toutefois, le modèle utilisé par Digital Orrery n'était qu'une approximation, comme celui idéalisé par Laplace. Des paramètres comme la lente diminution de la masse du Soleil qui brille n'étaient pas pris en compte. D'autre part, seules les planètes externes étaient considérées dans les calculs.

Digital Orrery effectua une retraite cérémoniale en 1991 après 7 années de précis et loyaux services.

L'odyssée de Sussman et Wisdom se poursuivit ensuite avec le superordinateur *Tollkit*. Dans ses calculs, le Système Solaire était alors pris en compte dans sa totalité.

• Les innovations de Jacques Laskar :

Le voyage de Jacques Laskar dans le chaos commença il y a environ une dizaine d'années, alors qu'il s'efforçait de déterminer les variations de l'orbite terrestre au cours des derniers millions d'années. Ceci dans le but d'établir un lien entre les modifications de son climat et les subtils décalages de l'orbite terrestre.

La mécanique céleste traditionnelle s'avéra inadaptée et J. Laskar décida de séparer en deux son problème :

- Renoncer à prédire les positions précises que les planètes occuperont dans plusieurs millions d'années.
- Choisir une formulation faisant ressortir les variations progressives mais cumulatives de la forme et de l'orientation des orbites.

Ainsi, ses équations estompaient les oscillations rapides et ne laissaient apparaître que les tendances à long terme.

Il construisit une expression mathématique comportant 150000 termes à partir des longues expressions algébriques déduites des équations de Laplace et Le Verrier. Ceci fut possible grâce au calcul formel sur ordinateur.

Jacques Laskar utilisa ensuite un ordinateur pour intégrer ces équations différentielles "moyennées" et suivre l'évolution des paramètres orbitaux.

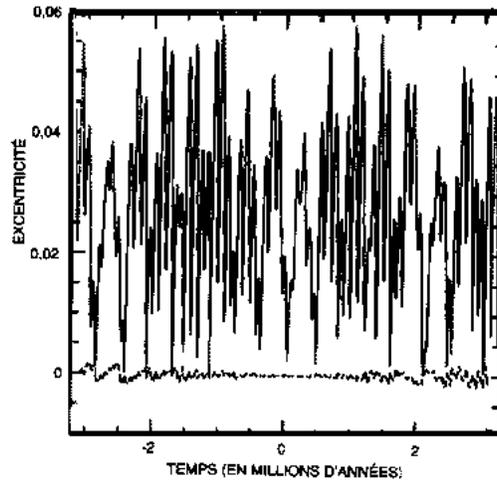
• Le BDL à la recherche du chaos :

Pour établir la présence ou l'absence du chaos, J. Laskar fit le calcul pour deux positions et vitesses de départ légèrement différentes puis compara les deux résultats.

Si les orbites étaient approximativement régulières (quasi-périodiques), les deux trajectoires dans l'espace des phases devaient rester proches, ou ne s'éloigner que très progressivement.

Autrement, la présence du chaos se trahirait par la divergence de plus en plus rapide des deux trajectoires et ce fut le cas.

Il put ainsi révéler la présence effective du chaos dans l'évolution du Système Solaire. **Les différences entre les deux trajectoires doubleraient toutes les 3,5 millions**



Ce graphe montre l'évolution de l'excentricité de l'orbite terrestre sur une période de six millions d'années centrée sur notre époque. La courbe continue, qui représente la solution obtenue par Quinn, S. Tremaine et M. Duncan, suit de près la courbe pointillée obtenue par J. Laskar. La courbe pointillée en bas du diagramme représente la différence entre les deux solutions.

FIG. 18 – Variations de l'excentricité de la Terre.

d'années. C'est-à-dire qu'une erreur de **100 mètres sur la position de la Terre s'amplifierait** si rapidement qu'il deviendrait impossible de préciser sa position le long de son orbite 100 millions d'années plus tard.

Toutefois ce résultat ne signifiait pas nécessairement que la Terre risquait de s'écarter de sa trajectoire actuelle.

Jacques Laskar conclut : *“Le calcul montre que les solutions de notre système différentiel, pour les conditions initiales qui sont celles du Système Solaire, sont chaotiques. Ce système différentiel est une très bonne approximation du Système Solaire réel. On peut en conclure que le mouvement du Système Solaire, et en particulier du Système Solaire interne est près d'être chaotique, mais la signification exacte de ce 'près' est difficile à cerner”.*

Il identifia dans ses équations “moyennes” des termes spécifiques désignant deux résonances gravitationnelles subtiles entre les planètes jusqu'alors inaperçues. **Ces résonances dites de second ordre agissent sur la rotation du demi-grand axe et sur l'excentricité.** Elles étaient responsables de ce comportement chaotique. L'une faisait intervenir Mars et la Terre ; l'autre Mercure, Vénus et Jupiter.

Là résidait la cause du chaos : **les résonances détruisent la prévisibilité. Elles amplifient les petits effets et les transforment en forces non négligeables.**

Finalement, J. Laskar conclut : *“Les grandes variations qui ont affecté les fréquences fondamentales du Système Solaire intérieur tout au long de son histoire renouvellent notre compréhension de plusieurs phénomènes à long terme. L'image de la dynamique du Système Solaire donnée ici est très différente du mouvement régulier [et] quasi-périodique décrit par Laplace et Lagrange il y a 200 ans. Elle est bien plus complexe.”*

5 Conclusion :

Durant des siècles, les physiciens et les astronomes inventèrent un monde mathématique idéal censé être un miroir de la nature.

La quasi-perfection du Système Solaire servit de guide à ce triomphe de l'esprit sur la matière.

Mais les mathématiques de génie de Poincaré mirent à jour une limite à la prédictibilité apportée par les modèles mathématiques.

Le chaos est donc une caractéristique intrinsèque des systèmes dynamiques sans pour autant les mener à leur dislocation.

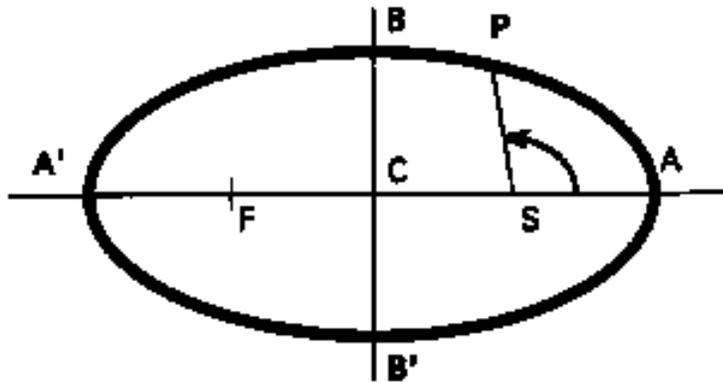


FIG. 19 – Schéma conventionnel d'une ellipse.

6 Annexe - Principes de mécanique :

6.1 Définition des orbites :

Comme toute science, la mécanique céleste utilise des outils qui lui sont propres. Aussi voici quelques éléments qui permettront de structurer les concepts de cette conférence.

- Tout d'abord, voici de quoi **caractériser une orbite** :

Les points C , F et F' représentent le centre et les foyers de l'ellipse. Les ellipses sont décrites par 3 paramètres :

- le demi-grand axe a : c'est le segment $[CA]$,
- le demi-petit axe b : segment $[CB]$,
- l'excentricité e : $e = b/a$ et caractérise l'aplatissement.

Selon l'aplatissement, l'ellipse devient d'autres figures géométriques :

- Si $e = 1$: l'ellipse devient un cercle.
- Si $e \in]0; 1[$: c'est une ellipse simple.
- Si $e = 0$: on obtient une parabole ou un segment.
- Si $e > 1$: c'est un couple d'hyperboles.

De façon générale, les orbites planétaires sont quasiment circulaires et e est proche de 1.

Ainsi, lorsque la planète se trouve au point A , on dit qu'elle est au **périhélie** : c'est sa position la plus proche du Soleil. De façon analogue, quand elle se situe au point le plus éloigné de notre étoile, elle est dite à **l'aphélie**.

6.2 Le calcul différentiel :

- Une notion importante est celle de la **dérivée** :

En physique il est fréquent de vouloir connaître comment évolue la position x d'un corps au cours du temps. Il s'avère alors que :

- ce qui caractérise l'évolution de la position au cours du temps s'appelle communément la *vitesse*.
- en mathématique, une variation au cours du temps (comme cela pourrait l'être aussi pour y qui varierait avec z ...), se calcule avec la dérivée notée $\frac{d}{dt}$; nous aurions donc ici $\frac{dx}{dt}$ et $(\frac{dy}{dz} \dots)$.

Ainsi, le *taux de changement d'une grandeur* est calculable et s'appelle la *dérivée*. La dérivée trouve son application surtout dans *les équations différentielles*. Ces dernières sont constituées de dérivées multiples de la même fonction.

Les phénomènes naturels comme la chute d'une pierre, par exemple, sont généralement représentés par une équation constituée de dérivée multiples de la variable en jeu. On parlera alors d'équation différentielle.

Par exemple, pour un pendule dont l'angle θ varie au cours du temps, l'équation différentielle qui décrit son mouvement sera :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{d\theta}{dt} \right] + Cste \cdot \theta = 0$$

Ce type d'équation permet de décrire le mouvement et est d'usage courant tant en mécanique céleste qu'en physique générale.

- Posons maintenant quelques bases de **cinétique** :

Toutes les planètes suivent une orbite. Un des objectifs des astronomes est de connaître la position des planètes sur leur orbite (notée \vec{r}), leur vitesse \vec{v} et leur accélération \vec{a} à un moment donné.

Ces grandeurs nécessitent d'être connues en fonction du temps t , c'est-à-dire une expression mathématique contenant le temps.

De plus, il existe une relation entre \vec{x} , \vec{v} et \vec{a} :

- r est la position : c'est une fonction de t
- v est le taux de variation de x au cours du temps, donc : $v = \frac{dx}{dt}$.
- a est le taux de variation de v , donc : $a = \frac{dv}{dt}$.

On utilise souvent la **quantité de mouvement** notée p définie comme *la masse multipliée par la vitesse* : $p = mv$.

Pour caractériser le mouvement sur une orbite, on notera T la **période de révolution** c'est-à-dire le temps mis par la planète pour effectuer un tour complet de son orbite.

6.3 Les lois de Newton :

Newton a, entre autre, énoncé trois lois fondamentales.

- **Loi du mouvement uniforme :**

Bien qu'un premier énoncé de cette loi ait été réalisé par Galilée, je le cite ici sous sa forme donnée par Newton :

Tout corps isolé est soit immobile, soit en mouvement rectiligne uniforme.

C'est-à-dire qu'en l'absence de toute force un objet reste immobile ou continuera à se déplacer indéfiniment dans la même direction et avec une vitesse constante.

- **Principe fondamental de la dynamique :**

Le taux de variation de la quantité de mouvement ($\frac{d\vec{p}}{dt}$), autrement dit le produit de la masse par l'accélération est égal en sens et en intensité à la somme des forces agissant sur le corps étudié : $m \cdot \vec{a} = \sum \vec{F}$ ($m = \text{constante}$)

Masse.Accélération=Forces appliquées

C'est de cette égalité que viennent les équations différentielles qui permettent de déterminer le mouvement des planètes.

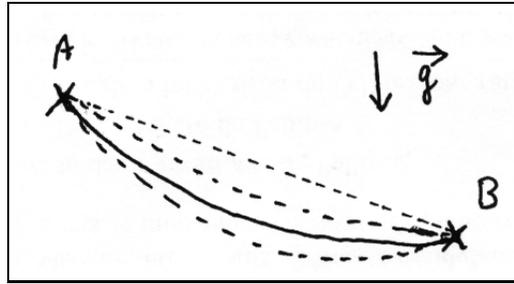
D'ailleurs, nous pouvons remarquer que lorsque le corps suit un mouvement uniforme ($v = \text{constante}$) ou est au repos ($v = 0$ tout le temps) $a = 0$ on retrouve la première loi.

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots = \vec{0}$$

- **Loi de l'action et de la réaction :**

Pour chaque force d'action appliquée à un corps, il existe, au point d'application de cette force d'action, une force de réaction qui lui est égale en intensité et opposée en sens.

Si l'on prend l'exemple de l'ascension d'une fusée voyageant dans le vide spatial, l'action d'éjecter des gaz du moteur vers le bas entraîne le déplacement de la fusée vers le haut. C'est bien la réaction de la fusée au mouvement du gaz qui la fait se déplacer.

FIG. 20 – Recherche de la trajectoire minimalisant S allant de A à B .

6.4 La mécanique lagrangienne :

Joseph Louis de Lagrange (1736-1813) était surnommé “Le prince de la mécanique” par Hamilton. Ce n’était pas sans raison, car c’est lui qui a posé la véritable pierre de base de la mécanique analytique.

Tout d’abord Lagrange se situe dans la lignée d’une longue suite de mécaniciens : Clairaut, Euler, d’Alembert, ... Maupertuis. Tous contemporains de Lagrange, ils contribuèrent à l’élaboration de la mécanique analytique.

En 1744, les travaux de Maupertuis dégagent le *Principe de moindre action* qui permet de déterminer le **mouvement** d’un point matériel **dans un champ de forces**.

Considérons le mouvement d’un poids soumis à la pesanteur le long d’un arc de trajectoire \widetilde{AB} . On évalue alors le produit de la *quantité de mouvement* par la *distance parcourue* sur \widetilde{AB} . On peut ainsi montrer que cette quantité, appelée *action* S , **peut être minimale** par rapport à tous les autres mouvements voisins passant par A et B aux mêmes instants respectifs (t_A et t_B) et possédant la même énergie. Cette condition d’action minimale permet de déterminer une trajectoire unique qui constitue alors le bon arc \widetilde{AB} .

De là, d’Alembert, puis Lagrange construisirent des relations fondamentales en calculant le travail des forces appliquées au corps étudié et se déplaçant de façon virtuelle le long des différentes trajectoires possibles. En cherchant à minimiser l’action S comme le faisait Maupertuis, on finit par trouver la bonne trajectoire allant de A à B avec une énergie minimale.

En supposant **des forces dérivant d’un potentiel**⁶ il aboutit à la relation suivante qui donne l’énergie mécanique totale du corps :

$$\mathcal{H} = T + V$$

où

- \mathcal{H} : l’énergie appelée aujourd’hui *Hamiltonien*,
- T : l’énergie cinétique totale,

6. comme c’est le cas pour la force gravitationnelle : il y a un “potentiel gravitationnel” au centre de la sphère terrestre qui représente de façon ponctuelle la matière de la Terre

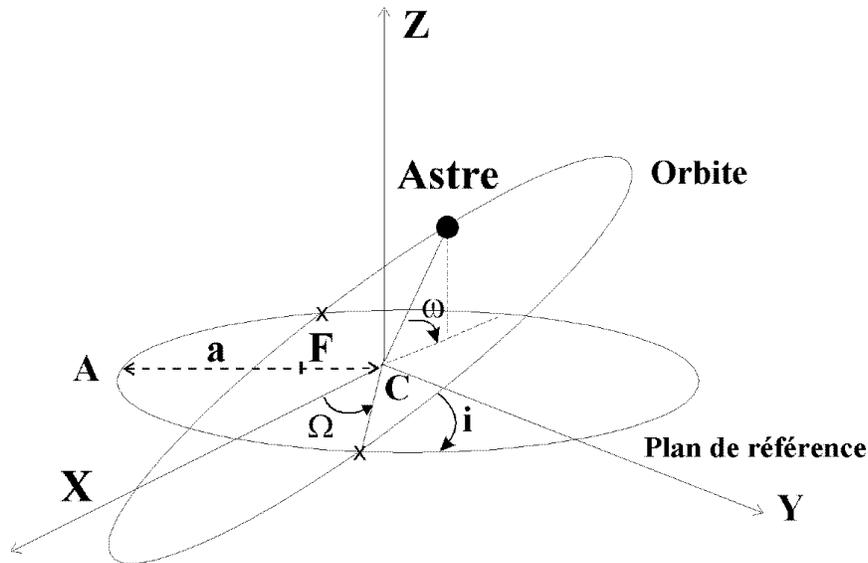


FIG. 21 – Paramètres d'une orbite planétaire.

- V : la somme de tous les potentiels.

Enfin, il constitua un système d'équations dites *équations de Euler-Lagrange* qui permettent d'obtenir simultanément la vitesse et la position du corps. Dans le cas du Système Solaire, on effectue un changement de variable en passant de la position, vitesse, etc. ... aux *éléments osculateurs* (voir figure ci-dessous) caractérisant mieux le mouvement orbital des planètes et dont la liste est :

- a : le demi-grand axe de l'ellipse,
- e : l'excentricité de l'ellipse,
- i : l'angle d'inclinaison de l'ellipse par rapport à un plan de référence,
- Ω : longitude du nœud (angle entre un axe de référence du plan et l'axe d'intersection de l'ellipse et de ce plan),
- ω : argument du périhélie (angle entre l'axe de référence et l'ellipse au Périhélie),
- M : anomalie moyenne (angle moyen de rotation reliant \widehat{CMH} et \widehat{FMH}).

Les modèles mathématiques actuels du Système Solaire qui sont utilisés dans les ordinateurs sont basés sur les 6 équations découlant de ces variables.

6.5 Les équations Système Solaire :

6.5.1 La modélisation du problème à n corps :

Dans le Système Solaire, la distribution des masses, les valeurs des positions et des vitesses est particulière. Ceci permet une résolution du problème des n corps grâce à des méthodes d'approximation.

Comme le Soleil possède une masse très importante, on peut considérer alors que le système est constitué de deux corps et les orbites sont képlériennes (ellipses). Mais **l'attraction des autres planètes** crée des petites perturbations agissant sur ce mouvement. Par ailleurs, le fait que les **planètes soient aplaties** produit d'autres perturbations.

Dans tous ces cas, les équations du mouvement d'un astre de coordonnées x, y, z seront de la forme :

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = -\mu \frac{x}{r^3} + \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{d^2y}{dt^2} = -\mu \frac{y}{r^3} + \frac{\partial R}{\partial y} \\ \frac{d^2z}{dt^2} = -\mu \frac{z}{r^3} + \frac{\partial R}{\partial z} \end{cases}$$

où :

- μ : est une constante,
- R : **la fonction de perturbation.**

R dépend des coordonnées du corps perturbateur et de ses caractéristiques propres comme son aplatissement. R possède une faible valeur et si elle s'annule à un instant donné, on retrouve les équations calculées dans le cas d'un problème à deux corps.

Ensuite, l'intégration de ce système d'équations différentielles par la méthode de la variation de la constante inventée par Lagrange permet d'aboutir aux *équations dites d'Euler-Lagrange* :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{2}{na} \cdot \frac{\partial R}{\partial M} \\ \frac{de}{dt} = \frac{-\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \cdot \frac{\partial R}{\partial \omega} + \frac{1-e^2}{na^2e} \cdot \frac{\partial R}{\partial M} \\ \frac{di}{dt} = \frac{-1}{na^2 \sin i \sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{\partial R}{\partial \Omega} + \frac{\cos i}{na^2 \sin i \sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{\partial R}{\partial \omega} \\ \frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2 \sin i \sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{\partial R}{\partial i} \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \cdot \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{\cos i}{na^2 \sin i \sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{\partial R}{\partial i} \\ \frac{dM}{dt} = n - \frac{2}{na} \cdot \frac{\partial R}{\partial a} - \frac{1-e^2}{na^2e} \cdot \frac{\partial R}{\partial e} \end{cases}$$

où les variables a, e, i sont dites *variables métriques* et Ω, ω, M sont appelées *variables angulaires*.

Enfin, on abouti à l'expression de l'hamiltonien \mathcal{H} qui correspond à l'énergie du système étudié :

$$\mathcal{H} = \frac{\mu}{2a} + R$$

Dans le paragraphe suivant, il est démontré que le problème à n corps est de ceux qui peuvent être décrit avec un hamiltonien.

6.5.2 Forme harmonique du potentiel des perturbations :

La théorie des perturbations a pour but d'étudier le mouvement d'une planète P_i de coordonnées x_i, y_i, z_i sous l'influence du Soleil situé au centre du repère et d'une

planète P_j . Les masses m_i sont exprimées en masse solaire et r_i, r_j correspondent aux distances P_iS et P_jS et $r_{ij} = P_iP_j$. Alors, les équations des n corps vues précédemment deviennent pour la planète i selon chaque coordonnée :

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = \underbrace{-G(1 - m_i) \frac{x_i}{r_i^3}}_{\text{Terme du mouvement képlérien}} + \sum_j \underbrace{Gm_j \left[\frac{x_j - x_i}{r_{ij}^3} - \frac{x_j}{r_j^3} \right]}_{R_{ij} : \text{terme de perturbation}}$$

Nous allons maintenant montrer que ce fameux terme de perturbation R_{ij} possède deux particularités :

- R_{ij} est un potentiel dont l'ensemble des forces de perturbation T_{ij} dérivent ;
- R_{ij} peut être mis sous la forme d'une somme de fonctions périodiques sinusoïdales dont certains termes sont à l'origine de la modification des orbites képlériennes.

- T_{ij} dérive du potentiel de perturbation R_{ij} :

Dire que T_{ij} dérive du potentiel de perturbation R_{ij} équivaut à écrire :

$$T_{ij} = \frac{dR_{ij}}{dr_i} \implies R_{ij} = \int T_{ij} dr_i$$

Grâce à cette intégrale, nous obtiendrons une nouvelle expression pour R_{ij} . En sommant les R_{ij} des trois coordonnées, le potentiel s'écrit :

$$R_{ij} = Gm_j \left[\frac{x_j - x_i + y_j - y_i + z_j - z_i}{r_{ij}^3} - \frac{x_j + y_j + z_j}{r_j^3} \right]$$

et T_{ij} est la forme dérivée de R_{ij} .

où d'une part :

$$\begin{aligned} r_{ij}^2 &= (x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2, \text{ donc :} \\ \frac{\partial(r_{ij}^2)}{\partial x_i} &= 2(-1)(x_j - x_i) \\ 2r_{ij} \cdot \frac{\partial r_{ij}}{\partial x_i} &= -2(x_j - x_i) \\ \frac{\partial r_{ij}}{\partial x_i} &= -\frac{x_j - x_i}{r_{ij}^2} \\ \implies \frac{x_j - x_i}{r_{ij}^3} &= -\frac{1}{r_{ij}^2} \cdot \frac{\partial r_{ij}}{\partial x_i} \\ \implies \frac{(x_j - x_i) + (y_j - y_i) + (z_j - z_i)}{r_{ij}^3} &= -\frac{1}{r_{ij}^2} \cdot \frac{dr_{ij}}{dr_i} \end{aligned}$$

et d'autre part :

$$r_j^2 = \vec{r}_j \cdot \vec{r}_j = x_j^2 + y_j^2 + z_j^2$$

$$\frac{d(\vec{r}_i \cdot \vec{r}_j)}{dr_i} = 0$$

or, la dérivée ne doit pas être nulle, donc essayons :

$$\frac{d(\vec{r}_i \cdot \vec{r}_j)}{dr_i} = \vec{r}_j \cdot \frac{\vec{r}_i}{\|\vec{r}_i\|} = x_j + y_j + z_j, \text{ ainsi :}$$

$$\frac{x_j + y_j + z_j}{r_j^3} = \frac{1}{r_j^3} \cdot \frac{d(\vec{r}_i \cdot \vec{r}_j)}{dr_i}$$

donc :

$$T_{ij} = Gm_j \left[-\frac{1}{r_{ij}^2} \cdot \frac{dr_{ij}}{dr_i} - \frac{1}{r_j^3} \cdot \frac{d(\vec{r}_i \cdot \vec{r}_j)}{dr_i} \right]$$

enfin, on trouve R_{ij} en intégrant T_{ij} :

$$\begin{aligned} \frac{R_{ij}}{Gm_j} &= \int \left(-\frac{1}{r_{ij}^2} \cdot \frac{dr_{ij}}{dr_i} - \frac{1}{r_j^3} \cdot \frac{d(\vec{r}_i \cdot \vec{r}_j)}{dr_i} \right) dr_i \\ &= -\int \frac{dr_{ij}}{r_{ij}^2} - \frac{1}{r_j^3} \int d(\vec{r}_i \cdot \vec{r}_j) \\ &= -\left(\frac{-1}{r_{ij}} \right) - \frac{\vec{r}_i \cdot \vec{r}_j}{r_j^3} \end{aligned}$$

d'où la nouvelle expression de R_{ij} :

$$R_{ij} = Gm_j \left[\frac{1}{r_{ij}} - \frac{\vec{r}_i \cdot \vec{r}_j}{r_j^3} \right]$$

La force T_{ij} dérive d'un potentiel (ici R_{ij}), donc le problème à n corps est hamiltonien.

- R_{ij} est une somme de fonctions périodiques :

On applique la définition du produit scalaire à $\vec{r}_i \cdot \vec{r}_j$:

$$\vec{r}_i \cdot \vec{r}_j = r_i r_j \cos S_{ij}, \text{ où } S_{ij} \text{ est l'angle entre les vecteurs } \vec{r}_i \text{ et } \vec{r}_j.$$

Ainsi :

$$R_{ij} = Gm_j \left[\frac{1}{r_{ij}} - \frac{r_i r_j \cos S_{ij}}{r_j^3} \right]$$

On constate que R_{ij} est une fonction périodique et l'on peut la décomposer en une somme de termes sinusoidaux grâce au théorème de Fourier :

$$R_{ij} = A(a_i, a_j, a_i, a_j, a_i, a_j)$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j_1 j_2 j_3} B_j \cos[j_1 \omega_i + j_2 \omega_j + j_3 (\Omega_i + \Omega_j)] \\
& + \sum_{j_1 j_2, \dots} C_j \sin[j_1 M_i + j_2 M_j + j_3 \omega_i + j_4 \omega_j + j_5 (\Omega_i - \Omega_j)]
\end{aligned}$$

Sous cette forme, R_{ij} possède un très grand nombre de termes dont on sait, par calcul, que certains possèdent un coefficient important (ici B_j et C_j) qui trahit alors une importante perturbation. En regardant la période correspondant à ce terme, on a alors une idée de la fréquence à laquelle à lieu cette perturbation.

Ainsi, **ces termes semblent indiquer que le Système Solaire est instable** car certains éléments des orbites prennent une grande valeur qui modifierait alors considérablement leur trajectoire.

7 Bibliographie :

Références

- [1] Agnès ACKER. *Astronomie Introduction*. Masson, 1992.
- [2] Pierre BERGÉ, Yves POMEAU, and Monique DUSBOIS-GANCE. *Des rythmes au chaos*. Opus, 1997.
- [3] Philippe BERNASCOLLE. *La mécanique céleste*. AAAOV, 1995.
- [4] Guy FONTAINE, Jean-Claude PAUL, and Adolphe TOMASINO. *Physique, Terminales C.E.* Nathan, 1989.
- [5] A. LANDAU et E. LIFCHITZ. *Mécanique*. Mir Éditions, 1966.
- [6] Jacques LASCAR. In *Chaos à grande échelle dans le Système Solaire et implications planétologiques*, Le point sur ..., 1994.
- [7] Ivars PETERSON. *Le chaos dans le Système Solaire*. Pour la science - Diffusion Belin, 1995.
- [8] Henri POINCARÉ. In *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique*, Œuvres de Henri POINCARÉ, tome VII. Gauthier-Villars, 1951.
- [9] In *Le chaos*, Pour la Science, janvier 1995.
- [10] In *Les mathématiciens*, Pour la Science, janvier 1994.